Regional Mathematical Olympiad - 2025

Time: 3 hours **November 16, 2025**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **No marks will be awarded for stating an answer without justification.**
- **Answer all the questions.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. (a) Let $n \geq 3$ be an integer. Find a configuration of n lines in the plane which has exactly
   (i) $n-1$ distinct points of intersection;
   (ii) n distinct points of intersection;

   (b) Give configurations of n lines that have exactly $n+1$ distinct points of intersection for (i) $n=8$ and (ii) $n=9$.

2. Let a, b, c be distinct nonzero real numbers satisfying
$$a+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{c}=c+\frac{2}{a}.$$
Determine the value of $|a^2b+b^2c+c^2a|$.

3. Let Ω and Γ be circles centred at O_1, O_2 respectively. Suppose that they intersect in distinct points A, B. Suppose O_1 is outside Γ and O_2 is outside Ω. Let ℓ be a line not passing through A and B that intersects Ω at P, R and Γ at Q, S so that P, Q, R, S lie on the line in this order. Furthermore, the points O_1, B lie on one side of ℓ and the points O_2, A lie on the other side of ℓ. Given that the points A, P, Q, O_1 are concyclic and B, R, S, O_2 are concyclic as well, prove that $AQ=BR$.

4. Prove that there do not exist positive rational numbers x and y such that
$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2025.$$

5. Let ABC be an acute-angled triangle with $AB<AC$, orthocentre H and circumcircle Ω. Let M be the midpoint of minor arc BC of Ω. Suppose that MH is equal to the radius of Ω. Prove that $\angle BAC = 60^\circ$.

6. Let $p(x)$ be a nonconstant polynomial with integer coefficients, and let $n \geq 2$ be an integer such that no term of the sequence
$$p(0),\ p(p(0)),\ p(p(p(0))),\ldots$$
is divisible by n. Show that there exist integers a, b such that $0 \leq a < b \leq n-1$ and n divides $p(b)-p(a)$.

———00000———

क्षेत्रीय गणित ओलिंपियाड – 2025

समय: 3 घंटे **नवम्बर 16, 2025**

निर्देश:

- **किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.**
- **पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.**
- **सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102.**
- **बिना स्पष्टीकरण के केवल उत्तर बताने पर अंक नहीं दिए जाएंगे.**
- **सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.**
- **प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.**

1. (a) मान लीजिए कि $n \geq 3$ एक पूर्णांक है। तल में n रेखाओं का ऐसा विन्यास खोजिए जिसमें ठीक–ठीक
   (i) $n-1$ भिन्न प्रतिच्छेदन बिंदु हों;
   (ii) n भिन्न प्रतिच्छेदन बिंदु हों।

   (b) ऐसे n रेखाओं के विन्यास दीजिए जिनमें ठीक $n+1$ भिन्न प्रतिच्छेदन बिंदु हों, (i) $n = 8$ के लिए, तथा (ii) $n = 9$ के लिए।

2. मान लीजिए कि a, b, c भिन्न अशून्य वास्तविक संख्याएँ हैं, जो निम्न शर्त को संतुष्ट करती हैं:

$$a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a}.$$

   $|a^2b + b^2c + c^2a|$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. मान लीजिए कि Ω और Γ दो वृत्त हैं जिनके केन्द्र क्रमशः O_1 और O_2 हैं। ये दोनों वृत्त दो विभिन्न बिंदुओं A और B पर एक–दूसरे को प्रतिच्छेद (intersect) करते हैं। मान लीजिए कि O_1 वृत्त Γ के बाहर स्थित है और O_2 वृत्त Ω के बाहर स्थित है। एक रेखा ℓ दी गई है जो A तथा B से नहीं गुजरती और जो Ω को P तथा R बिंदुओं पर काटती है, और Γ को Q तथा S बिंदुओं पर काटती है, इस प्रकार कि ये चारों बिंदु P, Q, R, S रेखा ℓ पर इसी क्रम में स्थित हैं। इसके अतिरिक्त, बिंदु O_1 और B रेखा ℓ के एक ही ओर हैं, और बिंदु O_2 तथा A रेखा ℓ के दूसरी ओर हैं। यह ज्ञात है कि बिंदु A, P, Q, O_1 समवृत्तीय (concyclic) हैं, और बिंदु B, R, S, O_2 भी समवृत्तीय हैं। सिद्ध कीजिए कि $AQ = BR$.

4. यह सिद्ध कीजिए कि ऐसी कोई धनात्मक परिमेय संख्याएँ x और y नहीं हैं जिनके लिए

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2025.$$

5. मान लीजिए कि ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $AB < AC$ है, तथा उसका लम्बकेन्द्र H और परिवृत्त Ω है। Ω की लघु चाप BC का मध्यबिंदु M है। यदि MH की लंबाई Ω की त्रिज्या के बराबर है, तो यह सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = 60°$.

6. मान लीजिए कि $p(x)$ एक चर बहुपद (nonconstant polynomial) है जिसके गुणांक पूर्णांक हैं, तथा $n \geq 2$ एक पूर्णांक है जिसके लिए श्रेणी

$$p(0),\ p(p(0)),\ p(p(p(0))), \ldots$$

   का कोई पद n से विभाज्य नहीं है। यह सिद्ध कीजिए कि ऐसे पूर्णांक a, b मौजूद हैं जिनके लिए $0 \leq a < b \leq n-1$ और n, $(p(b) - p(a))$ को विभाजित करता है।

----------00000----------